

令和 5 年度

数 学

問 題 冊 子

[1] 次の各方程式について、その方程式をみたす自然数の組  $(x, y)$  は存在するか。存在するときはすべての組を求め、存在しないときはそのことを示せ。

(1)  $4xy - 12x - 3y = 25$

(2)  $9x^2 - 4y^2 = 35$

(3)  $9x^2 + 18x - 4y^2 + 16y = 72$

[2]  $xy$  平面において方程式  $15x + 28y = 0$  が表す直線を  $L$  とする。

(1)  $L$  上にない格子点と  $L$  との距離の最小値を求めよ。ただし、格子点とは  $xy$  平面上の点で  $x$  座標と  $y$  座標がともに整数であるものをいう。

(2) (1) の最小値を与える格子点の座標  $(x, y)$  の中で、 $|x| + |y|$  が最小となるものを求めよ。

[3] 関数  $f(x)$  を

$$f(x) = -1 + x - |x| + |x - 2|$$

とし、 $y = f(x)$  のグラフを  $C$  とする。

(1)  $C$  の概形をかけ。

(2)  $a$  を実数とするとき、 $C$  と直線  $y = ax$  との共有点の個数を求めよ。

(3) (2) の共有点の個数が 2 個以上であるような  $a$  に対し、 $C$  と直線  $y = ax$  で囲まれた部分の面積を  $S(a)$  とする。  $S(a)$  の最小値とそれをとる  $a$  を求めよ。

[4]  $z$  を複素数とし、 $z, z^2, z^3$  が表す複素数平面上の点をそれぞれ  $A, B, C$  とする。これらは互いに異なり、また  $AB = AC$  であるとする。

(1) 上の条件をみたす  $z$  全体を考えたとき、 $A$  はどのような図形を描くか。

(2)  $A, B, C$  を結んだ図形が直角二等辺三角形になる  $z$  を求めよ。

(3)  $A, B, C$  を結んだ図形が正三角形になる  $z$  を求め、そのときの三角形  $ABC$  を図示せよ。